Об использовании пакетов MAPLE та MATHEMATICA при изучении экономической динамики

А.О.Антонова

Національний авіаційний університет

VIII Всеукраїнська
науково-практична конференція
Комп'ютерне моделювання та інформаційні системи в науці, економіці і освіті

25.05. 2011 **Одеса**

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПАКЕТОВ MAPLE И MATHEMATICA ПРИ ИЗУЧЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

А.О. Антонова
г. Киев, Национальный авиационный университет

В настоящее время изучение многих экономических явлений базируется на анализе математических моделей с привлечением современных компьютерных пакетов таких как Maple, Mathematica, Mathcad, Matlab. В первую очередь это относится к таким дисциплинам как экономическая динамика, финансовая математика и др.

Нелинейный характер моделей зачастую приводит к тому, что временное поведение решений сильно зависит от параметров модели и может носить сложный или даже хаотический характер [1,2]. Поэтому без применения современных компьютерных средств даже простая иллюстрация свойств моделей на лекции весьма затруднительна.

В докладе я остановлюсь на данных своего опыта изложения некоторых экономических моделей с точки зрения нелинейной динамики студентам-магистрам экономических специальностей. При разработке курса лекций и практических занятий я использовала как основу модели, которые анализируются в [1,3] и близкие к ним. При написании для студентов Maple и Mathematica программ расчетов были модифицированы рабочие листы (worksheets), приведенные в приложениях к книге [3], которые имеются на сайте [7].

В докладе я проиллюстрирую, как с помощью пакетов Maple, Mathematica строить динамические траектории, фазовые траектории, бифуркационные диаграммы и т.п. для дискретных и непрерывных экономических моделей. В качестве примеров я выбрала модифицированную Пуу модель Самуэльсона-Хикса с кубической нелинейностью [4], модель делового цикла Гудвина с фиксированным запаздыванием [5] и модель типа странного аттрактора, предложенную Магницким Н.А. и Сидоровым С.В. [6].

Я благодарна С.Н.Резнику за полезные обсуждения и помощь при отладке программ.

Литература

1. В.В.Лебедев. Математическое моделирование социально-экономических процессов. – М.: Изограф, 1997. –224с.

2. Э. Петерс. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. – М.: "Мир", 2000. –336с.

3. R. Shone. Economic dynamics. Phase Diagrams and their Economic Application,. Cambridge University Press 2002 (Second Edition). – 708 p.

4. T. Puu, I. Sushko A business cycle model with cubic nonlinearity, Chaos, Solitons & Fractals, 2004, vol. 19, issue 3, pp. 597-612.

5. R. M. Goodwin. The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles, 1951, Econometrica, vol. 19, pp.1–17.

6. Н.А.Магницкий, С.В. Сидоров. Новые методы хаотической динамики. – М.: Едиториал УРСС, 2004. 320 с.

7. www.cambridge.org/9780521816847

www.businessdictionary.com

Economic dynamics

Definition

Changes in an economic system over time, particularly those reflected in the behavior of markets, businesses, and the general economy.

В докладе рассматриваются следующие модели:

1) **Модель Самуэльсона –Хикса**

2) **Модель Пуу**

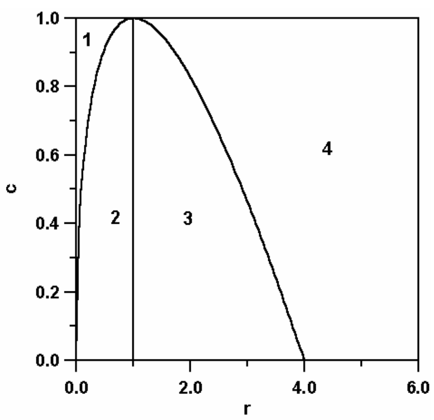
3) **Модель бизнес-цикла Гудвина с фиксированным запаздыванием в инвестициях**

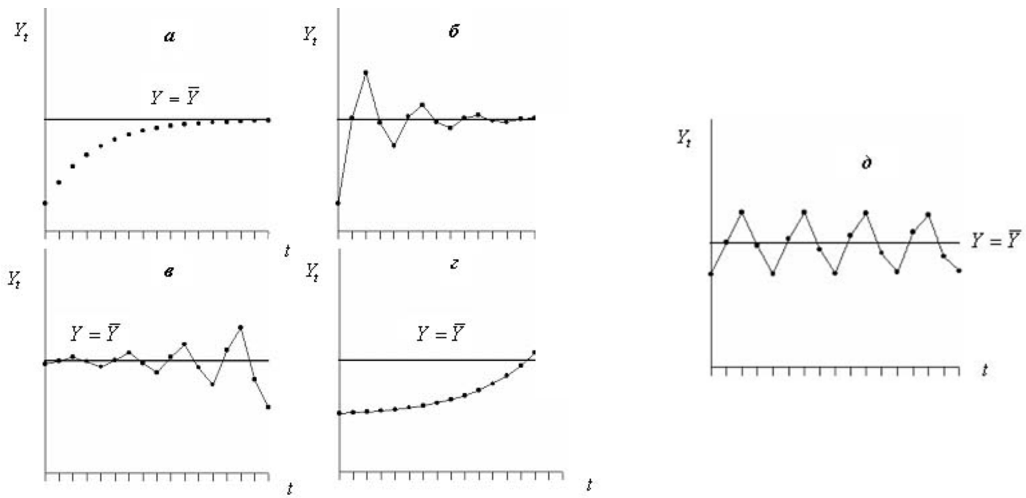
Модель Самуэльсона

Уравнение делового цикла Самуельсона (или Самуэльсона-Хикса) имеет вид

$$Y_{t+1} = (c + r)Y_t - rY_{t-1} + A$$

Y_t – *доход*, $0 < c < 1$ – *предельная склонность к потреблению*,
$r > 0$ – *коэффициент акселерации*, A – *независимые инвестиции*





Модель Самуэльсона-Хикса с потолком и полом

$$Y_{t+1} = \begin{cases} C_{\min} + cY_t + I_t, & C_{\min} + cY_t + I_t \le Y_{Max} \\ Y_{Max}, & C_{\min} + cY_t + I_t > Y_{Max} \end{cases}$$

$$I_t = (I_{ind})_t + A, \;\; (I_{ind})_t = r(Y_t - Y_{t-1})$$

или

$$\boxed{Y_{t+1} = \min\left\{\left(C_{\min} + cY_t + I_t\right), Y_{Max}\right\}}$$

Приклад 10. Побудувати залежність Y_t для рівняння Самуельсона- Хікса з

$c=0.8$ $r=2.3$, $A_0=350$, $C_{min}=50$, $I_{Am}=500$, $Ymax=3000$

і початкових умовах Y(0)=1500,Y(1)=1500.

Розв'язування.

```
> restart;with(plots):
```

Задаємо параметри і початкові умови

```
> y(0):=1500; y(1):=1500; Cmin:=50; c:=0.8; r:=2.3; A0:=350;
              ID:=500;Ymax:=3000:
```

обчислюємо послідовність доходу Y(i) (points1), послідовність інвестицій I(i) (points2)

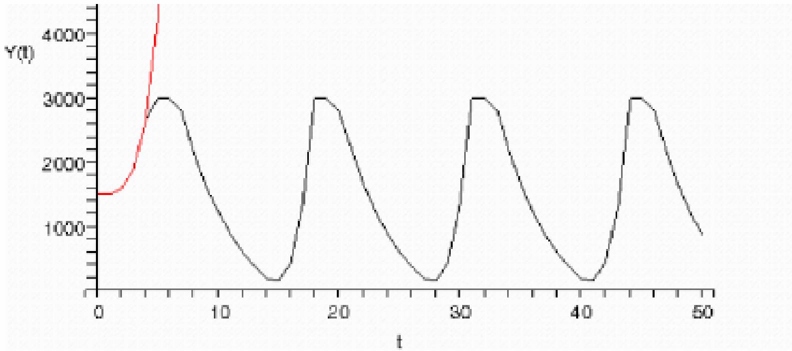
```
> for i from 2 by 1 to 50 do
    y(i):=min((Cmin+A0+c*y(i-1)+max(r*(y(i-1)-y(i-2)),-ID)),Ymax)
        end do:
> points1:=seq( [i,y(i)],i=0..50):
> points2:=seq( [i,max(r*(y(i-1)-y(i-2)),-ID)],i=2..50):
```

а також для наочності впливу обмежень Хікса послідовність доходу `points3` **points4**, які відповідають розв'язку рівняння Самуельсона- Хікса без обмежень

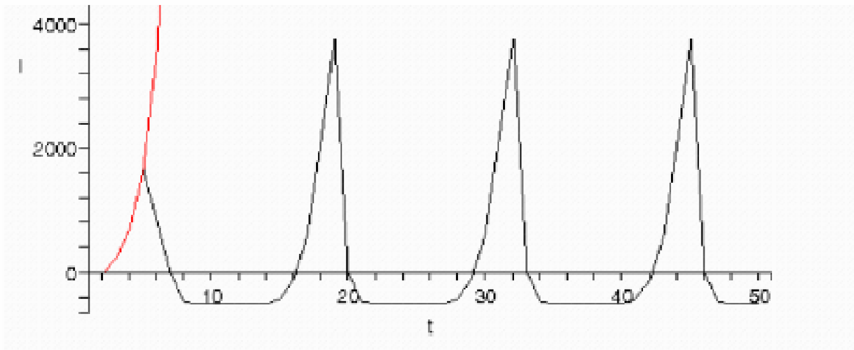
```
> for i from 2 by 1 to 25 do

          y(i):=Cmin+A0+c*y(i-1)+r*(y(i-1)-y(i-2))

               end do:

> points3:=seq( [i,y(i)],i=0..6):

> points4:=seq( [i,r*(y(i-1)-y(i-2))],i=2..7):
```

Наступні команди будують графіки доходів та інвестицій

```
> p1:=plot([points1],color=black,labels=["t","Y(t)"]):

> p3:=plot([points3],color=red): display(p1,p3);
```




```
> p2:=plot([points2],color=black,labels=["t","I"]):

> p4:=plot([points4],color=red):display(p2,p4);
```



Модель нелінійного акселератора Пуу

Т.Пуу предложил нелинейный аналог модели Самуельсона – Хикса с нелинейными индуцированными инвестициями и модифицированной функцией спроса:

$$Y_{t+1} = C_t + I_t,$$

$$C_t = C_{\min} + (1-s)Y_{t-1} + sY_{t-2}, \quad 0 < s < 1,$$

$$I_t = (I_{In})_t + A,$$

$$(I_{In})_t = r(Y_t - Y_{t-1}) - r(Y_t - Y_{t-1})^3$$

Если ввести замены

$$Y_t = y_{t-1} + \left(C_{\min} + A\right)/s,$$

$$z_t = y_t - y_{t-1}, \; a = r - s$$

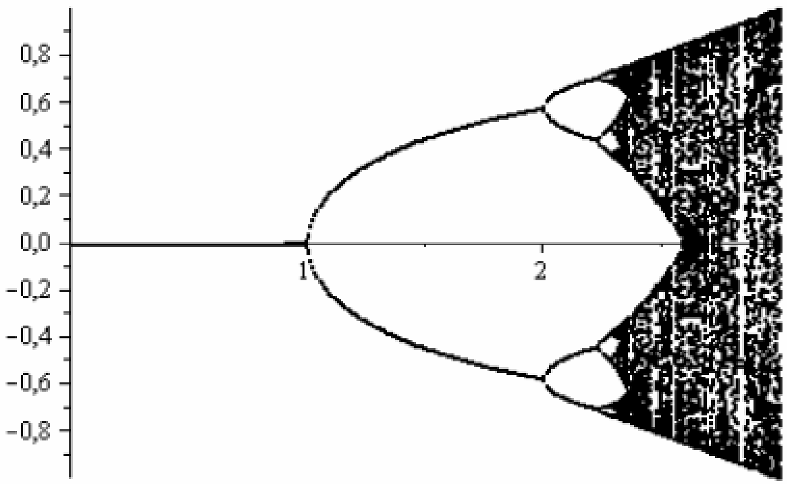
получим

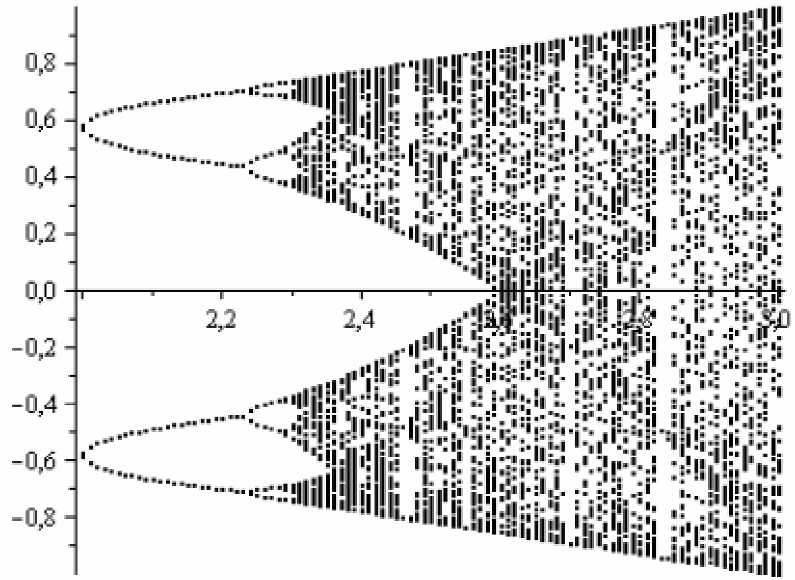
$$z_{t+1} = az_t - (a+1)z_t^3.$$

Построение бифуркационных диграмм (a>0)

Maple 11

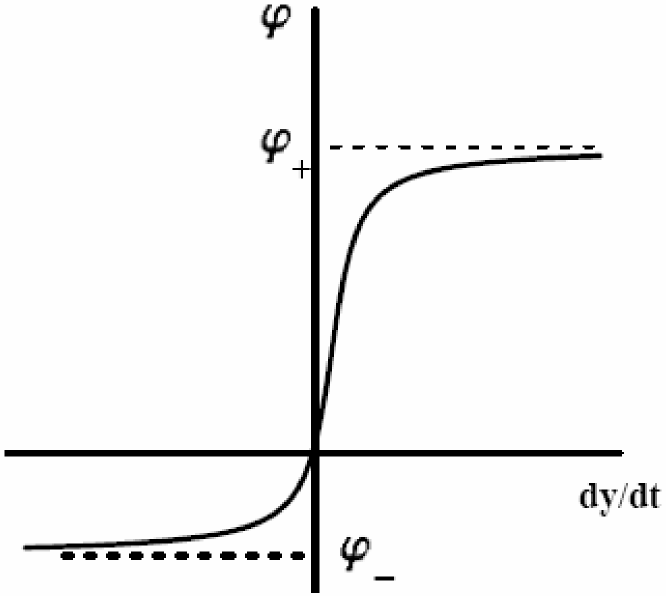
```
> restart:with(plots):
> bifurcplot:=NULL:
> for a from 0 to 3. by 0.01 do;
>    n[0]:=0.099;
>    for t from 0 to 200 do;
>       n[t+1]:=a*n[t]-(a+1)*n[t]**3;;
>      od;
>  bifurcplot:=bifurcplot, plot( [ [a,n[x]]$x =150..200 ],
     color=black, style=point,symbol=point,symbolsize=8):
> od:
> display(bifurcplot);
```





Goodwin's delay model with fixed time lag

$$\varepsilon\dot{y}(t) = -(1-\alpha)y(t) + \varphi(\dot{y}(t-\theta)) + A_{ni} \qquad \textbf{(1)}$$



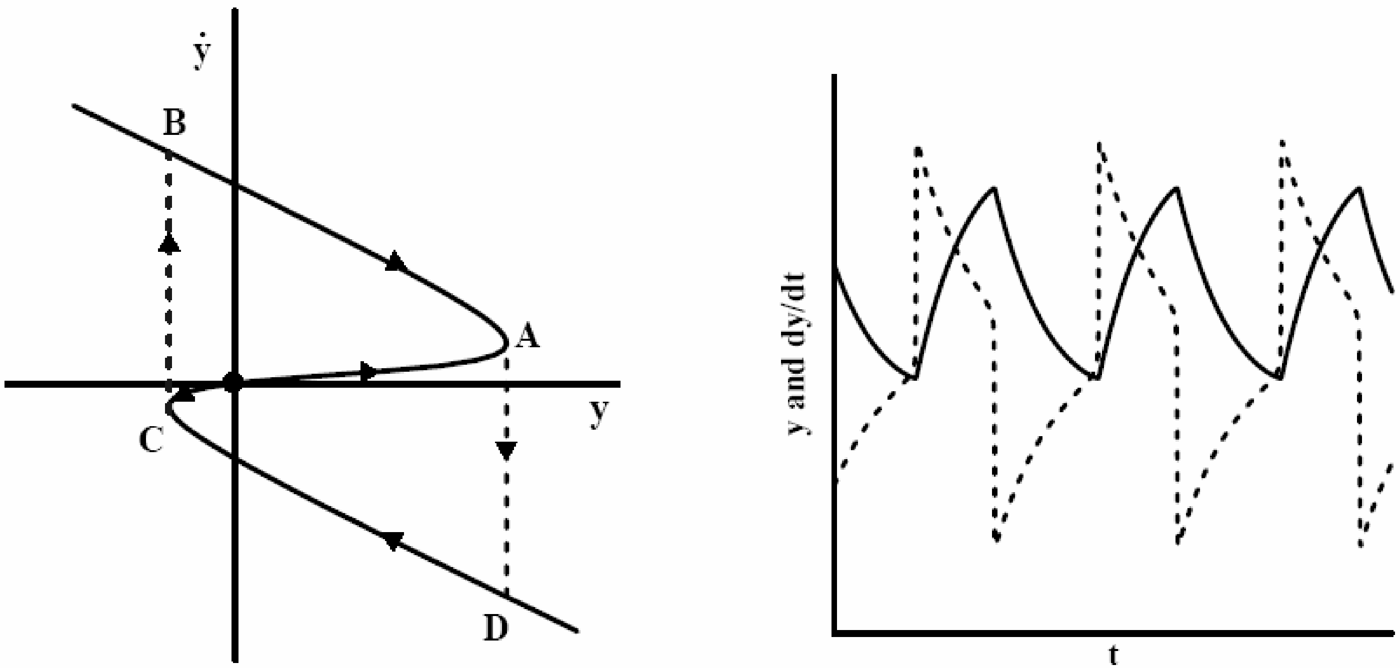
$$\varphi(0)=0,\ r=\frac{d\varphi}{dt}(0)$$

Here $y(t)$ is income, $\varepsilon^{-1} > 0$ the adjustment coefficient, α the marginal propensity to consume, $0 \le \alpha \le 1$, φ the induced investment function, $\theta > 0$ is a lag in the investment function, A_{ni} is autonomous investment, r is the acceleration coefficient, φ_+ and φ_- are upper and lower limits of φ.

Goodwin's model with θ=0

$$If \quad A_{ni} = 0,$$

$$y = \frac{\varphi(\dot{y}) - \varepsilon \dot{y}}{s}, \quad s = 1 - \alpha$$



Goodwin's differential model with $\theta \neq 0$

Goodwin does not analyze the properties of solutions of Eq.(1). He approximated (1) upon replacing $\dot{y}(t+\theta)$, $y(t+\theta)$ by the first two terms of their Taylor's expansion

$$y(t+\theta) \approx y(t) + \theta \dot{y}(t), \qquad \dot{y}(t+\theta) \approx \dot{y}(t) + \theta \ddot{y}(t)$$

and obtained the nonlinear ODE of the Lord Rayleigh type

$$\varepsilon\theta \ddot{y}(t) + \left(\varepsilon + s\theta\right) \dot{y}(t) + s y(t) = \varphi\left(\dot{y}(t)\right) \quad (2),$$

if

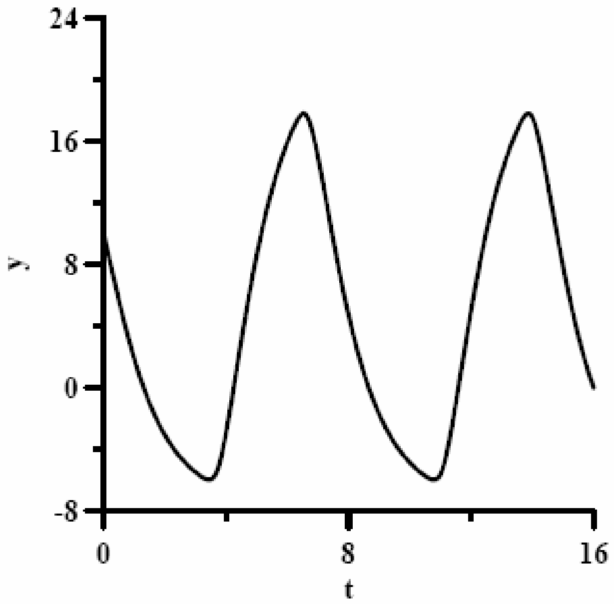
$$\varepsilon + s\theta < r \ !$$

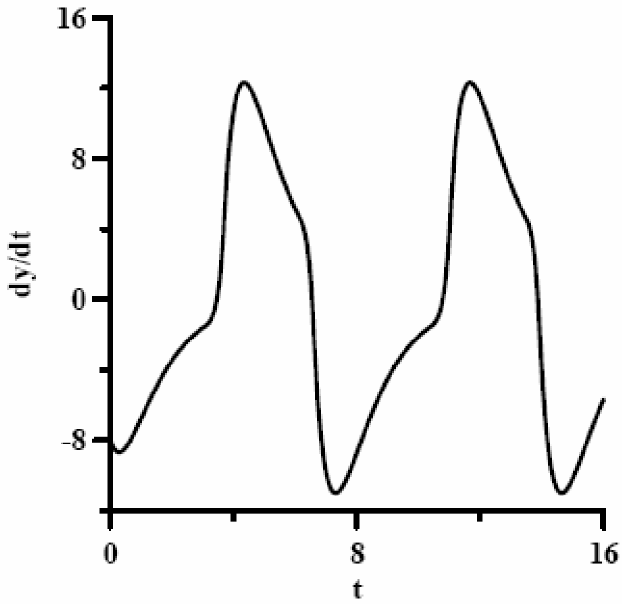
Goodwin then integrated (2) for

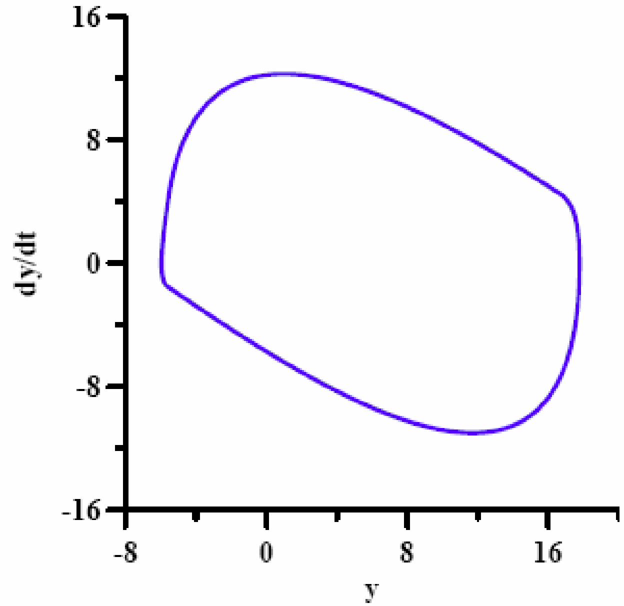
$$\varphi_G(z) = \begin{cases} \varphi_+, if\ z > r^{-1}\varphi_+ \\ rz, if\ r^{-1}\varphi_- \le z \le r^{-1}\varphi_+ \\ \varphi_-, if\ z < r^{-1}\varphi_- \end{cases}$$

and the following values of constants $\varepsilon = 0.5,\ \alpha = 0.6,\ \theta = 1,\ r = 2,\ \varphi_+ = 9,\ \varphi_- = -3$ and obtained a limit cycle. The range of $y(t)$ is from -5.0 in the trough to +19.0 at the peak, and the period is slightly over 9 years.

Goodwin's differential model with $\theta \neq 0$







PROBLEM STATEMENT

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{y}\left(t\right) = -(1-\alpha)y\left(t\right) + \varphi\left(\dot{y}(t-\theta)\right) + A_{ni}, \;\; 0 \le t \le t_f, \\ y(t) = \Phi(t), \;\; -\theta \le t \le 0. \end{cases}$$

This is a neutral delayed nonlinear differential equation, Φ(t) is initial function

Parameters used:

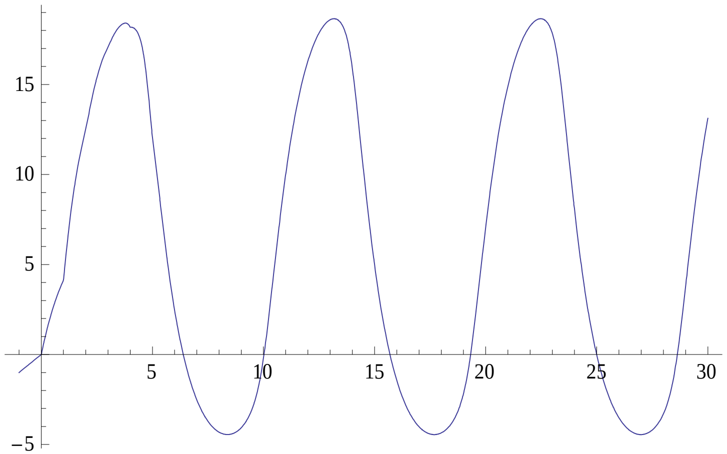
$$\varepsilon = 0.5, \;\alpha = 0.6, \;\; r = 2, \;\;\; \varphi_+ = 9, \;\; \varphi_- = -3$$

MATHEMATICA 7 “умеет ” решать уравнения с запаздыванием !

Моделирование длиннопериодических колебаний Гудвина

$$\Phi(t)=t$$

```
In[1]:= eps = 0.5; c = 0.4; d = 12 / Pi; a = 1; theta = 1.;

In[2]:= sol = NDSolve[
          {eps * x'[t] == -c * x[t] + d * (ArcTan[x'[t - theta] - a] + ArcTan[a]),
           x[t /; t ≤ 0] == 1 * t}, x, {t, -theta, 40}]

Out[2]= {{x → InterpolatingFunction[{{-1., 40.}}, <>]}}

In[3]:= Plot[Evaluate[{x[t]} /. First[sol]], {t, -theta, 30
        }, PlotRange → All]

Out[3]=
```

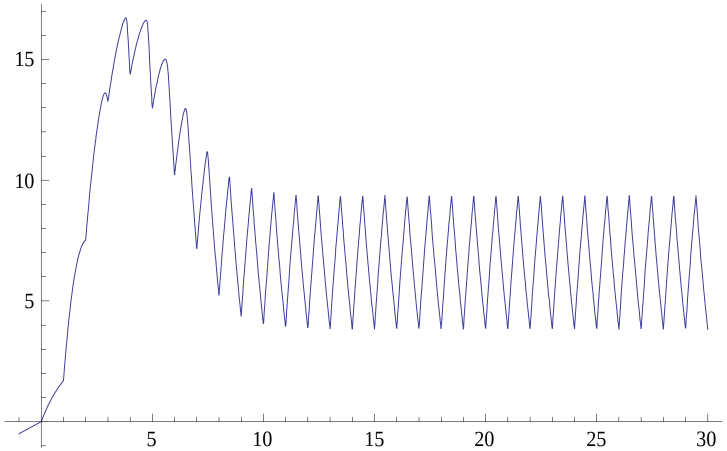


Моделирование коротко периодических колебаний Гудвина

Φ(t)=0.1t

```
In[6]:= sol = NDSolve[
          {eps * x'[t] == -c * x[t] + d * (ArcTan[x'[t - theta] - a] + ArcTan[a]),
           x[t /; t ≤ 0] == .1 * t}, x, {t, -theta, 40}]

Out[6]= {{x → InterpolatingFunction[{{-1., 40.}}, <>]}}

In[7]:= Plot[Evaluate[{x[t]} /. First[sol1]], {t, -theta, 30
         }, PlotRange → All]
```

Out[7]=



Литература

1. В.В.Лебедев. Математическое моделирование социально-экономических процессов. – М.: Изограф, 1997. –224с.

2. Э. Петерс. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. – М.: "Мир", 2000. –336с.

3. R. Shone. Economic dynamics. Phase Diagrams and their Economic Application, Cambridge University Press 2002 (Second Edition). – 708 p.

Примеры программ ко всем главам книги находятся на сайте www.cambridge.org/9780521816847

4. T. Puu. Order and disorder in business cycles. Annals of Operations Research, 1992, vol. 37, pp.169-183.

5. R. M. Goodwin. The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles, 1951, Econometrica, vol. 19, pp.1–17.

Дякую за увагу!

Thank you!

Спасибо за внимание!